DOI:10.14188/j.2095-6045.20260372

文章编号:2095-6045(2026)05-0115-08

正常重力等位面形状差异及其对重力匹配导航误差传播的影响

宗敬文[1]　郭正东[1]　边少锋[2]　朱海荣[1]

1 海军潜艇学院,山东 青岛,266199

2 海军工程大学,湖北 武汉,433033

Shape Differences of Normal Gravity Equipotential Surfaces and Their Influence on Error Propagation in Gravity Matching Navigation

ZONG Jingwen[1]　*GUO Zhengdong*[1]　*BIAN Shaofeng*[2]　*ZHU Hairong*[1]

1 Naval Submarine Academy, Qingdao 266199, China

2 Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China

摘　要:针对正常重力场中不同等位面模型间几何联系、形状差异及其物理误差传播机制,对正常重力位函数展开了系统性推导与数值分析。首先,建立了水准椭球面向径方程和扁球体水准面位函数方程;其次,采用幂级数展开法推导了Bruns扁球和Helmert扁球水准面方程,并以牛顿迭代法作为数值基准检验有限项展开结果的精度;最后,基于正常重力垂直梯度建立等位面几何偏差向重力异常误差及匹配导航定位误差传播的定量评估模型。计算结果表明,Bruns扁球与标准水准椭球面之间可存在十米量级系统偏差,其诱发的重力异常误差可达数mGal量级;Helmert扁球与水准椭球面之间的差异主要处于厘米量级,对应重力异常误差约为0.02～0.03 mGal。研究结果说明,等位面模型选择会直接影响高精度重力异常归算和重力匹配导航结果,Helmert扁球或与水准椭球严格一致的正常重力场模型更适合作为海洋重力基准图构建的参考模型。

关键词:正常重力场;水准椭球;等位面偏差;重力匹配导航

中图分类号:P223

文献标志码:A

Abstract: Normal gravity field models form the foundation of physical geodesy and marine gravity field construction. Focusing on the geometric relationships, shape differences and physical error propagation mechanisms among different equipotential surface models in the normal gravity field, this paper conducts a systematic derivation and numerical analysis of the normal gravity potential function. First, the radial equation of the level ellipsoid and the potential function equation for the level surface of an oblate spheroid are established. Second, the level surface equations for the Bruns spheroid and Helmert spheroid are derived using the power series expansion method, and the Newton iteration method is adopted as the numerical benchmark to verify the accuracy of finite-term expansion results. Finally, based on the vertical gradient of normal gravity, a quantitative evaluation model is constructed to describe how geometric deviations of equipotential surfaces propagate into gravity anomaly errors and positioning errors in gravity matching navigation. Calculation results show that a systematic deviation on the order of ten meters exists between the Bruns spheroid and the standard level ellipsoid, and the induced gravity anomaly error can reach the order of several mGal. The difference between the Helmert spheroid and the level ellipsoid is mainly on the centimeter scale, with a corresponding gravity anomaly error of approximately 0.02～0.03 mGal. The research findings indicate that the selection of equipotential surface models directly affects the performance of high-precision gravity anomaly reduction and the results of gravity matching navigation. The Helmert spheroid, or the normal gravity field model which strictly coincides with the level ellipsoid, is more suitable as reference models for the construction of marine gravity reference maps.

Key words: normal gravity field; level ellipsoid; equipotential surface deviation; gravity matching navigation

地球重力场的精确建模是现代物理大地测量、海洋大地测量和惯性/地球物理组合导航的重要理论基础[1]。真实地球内部密度分布复杂,外部形状

引用格式:宗敬文,郭正东,边少锋,等. 正常重力等位面形状差异及其对重力匹配导航误差传播的影响[J]. 测绘地理信息,2026,51(5):115-122(ZONG Jingwen,GUO Zhengdong,BIAN Shaofeng,et al. Shape Differences of Normal Gravity Equipotential Surfaces and Their Influence on Error Propagation in Gravity Matching Navigation[J]. Journal of Geomatics,2026,51(5):115-122)

基金项目:国家自然科学基金(42404009,42430101)。

亦非规则几何曲面，因此在理论建模和工程计算中通常采用规则质体的重力场作为地球重力场的近似[2]。球体可视为第一近似体，旋转椭球体或旋转扁球体则构成第二近似体，后者通常被称为正常地球体。正常地球体所产生的重力位及其等位面，是建立正常重力场、重力异常归算和大地水准面确定的基本参照。

在正常重力场的严密构建中，常用近似为第二近似体。正常椭球的确定可概括为两类经典方法：一类为 Laplace 方法，即从地球引力位的有限项球谐展开和离心力位出发构造正常重力位，并令正常位等于不同常数以得到一族等位面；当常数取特定值时，相应等位面所包围的质体可定义为正常椭球。该方法下常见模型包括 Bruns 扁球[3]和 Helmert 扁球[4]。另一类为 Stokes 方法，即假定水准椭球为正常椭球，水准椭球面本身为正常重力等位面，并由该椭球所产生的重力场定义正常重力场[5-12]。丁行斌[13]论述了扁球水准面方程和重力公式的级数表示方法，指出了水准面方程和重力公式应取决于重力位的级数展开精度，推导重力公式时必须与重力位保持一致。李厚朴和边少锋[14]借助计算机代数系统，采用幂级数展开法对Helmert扁球与Bruns扁球的水准面方程进行新的研究，揭示出这2种扁球体水准面与水准椭球面的形状差异。水准椭球在几何表达、物理基准和工程计算之间具有较好的统一性，常用于统一大地测量中的几何参考面/物理参考面、正常重力计算和空间参考基准的建立。

目前，我国在进行重力资料处理与区域重力场逼近时，依然使用这两类椭球模型。需要指出的是，由有限阶正常位函数定义的 Bruns 扁球、Helmert 扁球水准面，与 Stokes 意义下严格定义为正常重力等位面的水准椭球面，在几何形态和物理内涵上并非完全等效。然而，对于重力匹配导航而言，定位精度不仅受匹配算法性能制约，也取决于重力基准图、实测重力归算和正常重力参考面之间的物理一致性。若在重力异常归算、基准图构建或实时观测改正过程中混用不同参考等位面，其径向或法向几何偏差将通过正常重力垂直梯度传播为系统性重力异常误差，并进一步在匹配过程中表现为伪相关偏差或定位系统偏置[5]。已有研究多从重力异常图分辨率、局部粗糙度、信息熵、梯度方差、匹配区域适宜性以及算法鲁棒性等角度分析导航误差来源[7-11]，而从正常重力场参考面的物理定义出发，定量刻画 Bruns 扁球、Helmert 扁球与水准椭球之间的等位面偏差及其对重力异常归算和匹配导航定位误差传播机制的研究仍相对不足。对于现代海洋重力测量和重力匹配导航而言，mGal 量级的系统误差已可能影响重力基准图的一致性和匹配定位的可靠性。因此，在高精度海洋重力场构建和重力匹配导航应用背景下，不能简单地将不同正常椭球或扁球模型视为可相互替代的几何近似，而有必要进一步分析不同等位面模型之间的径向差异和法向偏差，建立其经正常重力垂直梯度向重力异常系统误差传播的定量关系，并评估其对重力基准图构建和匹配导航定位精度的影响。

基于此，本文以 Bruns 扁球、Helmert 扁球和水准椭球为研究对象，就扁球体水准面和水准椭球面间的联系和差异做出了严密的解析推导与数值分析，采用幂级数展开法和牛顿迭代法对不同正常重力等位面的形状差异进行精密计算，进一步建立等位面偏差-重力异常误差-匹配导航漂移之间的物理误差传播关系，以期为高精度海洋重力场建模、重力基准图构建和水下重力匹配导航提供理论依据。

1 正常重力等位面模型与计算方法

1.1 水准椭球面方程

在正常重力场计算中，水准椭球面被应用于统一大地测量中的几何参考面和物理参考面，起到桥梁的作用，且水准椭球面封闭表达式简单，易于实际计算。水准椭球在几何上为一旋转椭球。设长半轴为 a，短半轴为 b，扁率为 $\alpha=(a-b)/a$，则其直角坐标方程为：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

在以地心纬度 φ 表示的极坐标系中，水准椭球面向径可写为：

$$\rho_E(\varphi)=\frac{a(1-\alpha)}{\sqrt{1-(2\alpha-\alpha^2)\cos^2\varphi}} \tag{2}$$

式中，ρ_E 为水准椭球面向径。该表达式具有封闭形式，便于作为比较 Bruns 扁球和 Helmert 扁球水准面形状差异的几何基准。

1.2 扁球体水准面方程幂级数展开法

在 Laplace 方法中，扁球体水准面由正常重力位的等值条件确定。若采用二阶和四阶带谐项，并叠加离心力位，则正常重力位可表示为[12]：

$$U(\rho,\varphi)=\frac{GM}{\rho}\left\{1-\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 J_2 P_2(\sin\varphi)-\left(\frac{a}{\rho}\right)^4 J_4 P_4(\sin\varphi)\right\}+\frac{1}{2}\omega^2\rho^2\cos^2\varphi \tag{3}$$

式中,GM 为地球引力常数与质量的乘积,ω 为地球自转角速度,J_2 和 J_4 分别为二阶和四阶带谐系数,P_2 和 P_4 为 Legendre 多项式,ρ 为地心向径。其中给定参考椭球的几何参数,并且结合重力位水准面方程 $U=U(\rho,\varphi)$,可以同时确定扁球水准面方程和重力公式,以及确定其级数展开精度。

Bruns 扁球仅保留二阶带谐项,其正常位可写为:

$$U_B(\rho_B,\varphi)=\frac{GM}{\rho_B}\left\{1-\left(\frac{a}{\rho_B}\right)^2 J_2 P_2(\sin\varphi)\right\}+\frac{1}{2}\omega^2{\rho_B}^2\cos^2\varphi \tag{4}$$

Helmert 扁球则在 Bruns 扁球的基础上进一步引入四阶带谐项:

$$U_H(\rho_H,\varphi)=\frac{GM}{\rho_H}\left\{1-\left(\frac{a}{\rho_H}\right)^2 J_2 P_2(\sin\varphi)-\left(\frac{a}{\rho_H}\right)^4 J_4 P_4(\sin\varphi)\right\}+\frac{1}{2}\omega^2{\rho_H}^2\cos^2\varphi \tag{5}$$

令 $t=\sin\varphi$,且 $P_2(\sin\varphi)=\frac{1}{2}(3t-1)$,$P_4(\sin\varphi)=\frac{1}{8}(35t^2-30t+3)$。

由等位条件 $U_B=U_0$ 和 $U_H=U_0$,对式(4)和式(5)等号两边取变量 t 的各阶导数,可以依次解出 ρ 对 t 的各阶导数(ρ_t',ρ_t'',…)的表达式,进而 $\rho=\rho(t)$ 可展开为幂级数形式:

$$\rho=\rho_t(0)+\rho_t'(0)t+\frac{1}{2!}\rho_t''(0)t^2+\frac{1}{3!}\rho_t'''(0)t^3+\cdots \tag{6}$$

通过隐函数微分解算出的 ρ 对 t 各阶导数的表达式形式为 $\rho(\rho,t)$,$\rho_t'(\rho,t)$,$\rho_t''(\rho,t)$,…,鉴于篇幅原因,可得到相应的隐式水准面方程:

$$\rho_B=\frac{GM}{U_0}-\frac{GM}{U_0}J_2\left(\frac{a}{\rho_B}\right)^2\frac{1}{2}(3t-1)+\frac{\omega^2\rho_B^3}{2U_0}(1-t) \tag{7}$$

$$\rho_H=\frac{GM}{U_0}-\frac{GM}{2U_0}J_2\left(\frac{a}{\rho_H}\right)^2(3t-1)-\frac{GM}{8U_0}J_4\left(\frac{a}{\rho_H}\right)^4(35t^2-30t+3)+\frac{\omega^2\rho_H^3}{2U_0}(1-t) \tag{8}$$

式(7)和式(8)均为关于 ρ 的非线性方程,可通过幂级数展开获得解析近似,也可通过数值迭代直接求解。式中,ρ_B 为 Bruns 扁球向径,ρ_H 为 Helmerts 椭球向径。本文取 $t=0$,$\rho=a$ 分别代入到式(7)和式(8)中,最终推导公式(6)取至 t^3 项,则 $\rho(\rho,t)$,$\rho_t'(\rho,t)$,$\rho_t''(\rho,t)$,$\rho_t'''(\rho,t)$表达式如下:

$$\begin{cases}\rho_{Bt}(0)=\dfrac{GM}{U_0}+\dfrac{GMJ_2}{2U_0}+\dfrac{a^3\omega^2}{2U_0}\\ \rho_{Bt}'(0)=\dfrac{1}{2}\dfrac{a(m+3J_2)}{m-1-\frac{3}{2}J_2}\\ \rho_{Bt}''(0)=\dfrac{3}{4}\dfrac{a(m^3-2m^2-2mJ_2-8m^2J_2+12{J_2}^2-30m{J_2}^2+9{J_2}^3)}{(m-1-\frac{3}{2}J_2)^3}\\ \rho_{Bt}'''(0)=\dfrac{3a}{16(m-1-\frac{3}{2}J_2)^3}(48m^3-40m^4+10m^5+72m^2J_2+280m^3J_2-70m^4J_2+36{J_2}^2+180m^2{J_2}^2+\cdots)\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}\rho_{Ht}(0)=\dfrac{GM}{U_0}+\dfrac{GMJ_2}{2U_0}+\dfrac{a^3\omega^2}{2U_0}-\dfrac{3GMJ_4}{8U_0}\\ \rho_{Ht}'(0)=\dfrac{1}{2}\dfrac{a(m+3J_2-\frac{15}{2}J_4)}{m-1-\frac{3}{2}J_2+\frac{15}{8}J_4}\\ \rho_{Ht}''(0)=\dfrac{3}{4}\dfrac{a(m^3-2m^2-2mJ_2-8m^2J_2+12{J_2}^2-30m{J_2}^2+9{J_2}^3+\frac{35}{3}J_4-\frac{85}{3}pJ_4-55J_2J_4)}{(m-1-\frac{3}{2}J_2-\frac{15}{8}J_4)^3}\\ \rho_{Ht}'''(0)=\dfrac{24a}{(8-8-12J_2+15J_4)^5}(12\,288m^3-10\,240m^4+2\,560m^5+18\,432m^2J_2+71\,680m^3J_2-17\,920m^4J_2+9\,216m{J_2}^2+46\,080m^2{J_2}^2+\cdots)\end{cases} \tag{10}$$

式(7)和式(9)为幂级数展开法推导出的取至t^3项的Bruns扁球水准面方程表达式;式(8)和式(10)为幂级数展开法推导出的取至t^3项的Helmert扁球水准面方程表达式。

1.3 扁球体水准面方程牛顿迭代法

由于隐式水准面方程在高阶展开时系数较复杂[12],数值计算方法具有高效稳定的特点本文采用牛顿迭代法作为数值基准。

一般迭代格式为:

$$p_{k+1}=p_k-\frac{f(p_k)}{f'(p_k)},\ k=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

对 Bruns 扁球,由式(7)整理得:

$$\begin{cases} f_B(\rho_B)=\omega^2\rho_B^5(1-t)-2U_0\rho_B^3+2GM\rho_B^2-GMa^2J_2(3t-1) \\ f_B'(\rho_B)=5\omega^2\rho_B^4(1-t)-6U_0\rho_B^2+4GM\rho_B \end{cases} \tag{12}$$

对 Helmert 扁球,由式(8)整理得:

$$\begin{cases} f_H(\rho_H)=4\omega^2\rho_H^7(1-t)-8U_0\rho_H^5+8GM\rho_H^4-4GMa^2J_2\rho_H^2(3t-1)-GMa^4J_4(35t^2-30t+3) \\ f_H'(\rho_H)=28\omega^2\rho_H^6(1-t)-40U_0\rho_H^4+32GM\rho_H^3-8GMa^2J_2\rho_H(3t-1) \end{cases} \tag{13}$$

式(12)为Bruns扁球水准面牛顿迭代函数及其导函数;式(13)为Helmert扁球水准面牛顿迭代函数及其导函数,牛顿迭代法不依赖有限阶截断,适合作为幂级数展开结果的精度检验基准。考虑到牛顿迭代的二次收敛是局部性质,仅在根的小吸引域内生效,且存在初值落入函数导数近零区域会发生步长爆炸发散和多根、多极值的问题。因此,选择根据文献[14]可确定迭代初值。

2 数值验证与误差传播分析

2.1 幂级数展开精度检验

§1.2和§1.3从解析法和数值法分别对Bruns和Helmert两种扁球水准面进行了理论推导,本节将对上述推导公式精度进行计算和验证,分析比较扁球体水准面与水准椭球面间的差异。

将采用GRS80国际椭球,其具体参数如下:$a=6\,378\,137$ m,$\omega=0.7\,292\,115\times10^{8}$ rads^{-2},$GM=3\,986\,005\times10^{8}$ m^{3}s^{-2},$U_0=62\,636\,860.85$ m^{2}s^{-2}。

将GRS80国际椭球参数[15]代入到水准椭球面方程(2)中得到:

$$\rho_E(\varphi)=\frac{6\,356\,752.298}{\sqrt{1-0.006\,694\cos^2\varphi}} \tag{14}$$

文献[12]给出了Bruns扁球水准面方程式和Helmert扁球水准面方程式:

$$\rho_B=6\,378\,137-21\,384.686\sin^2\varphi \tag{15}$$

$$\rho_H=6378137-21\,384.686\sin^2\varphi-26.91\sin^22\varphi \tag{16}$$

根据文献[14]给出方法计算出的幂级数展开至t^2项Bruns扁球水准面方程式和Helmert扁球水准面方程式为:

$$\rho_{LB}=6\,378\,131.299\,9-21\,435.745\sin^2\varphi+42.244\sin^4\varphi \tag{17}$$

$$\rho_{LH}=6\,378\,136.988-21\,492.461\sin^2\varphi+107.868\,57\sin^4\varphi \tag{18}$$

式(7)和(9)为幂级数展开至t^3项的Bruns扁球水准面方程表达式为:

$$\rho_1=6\,378\,131.299\,9-21\,435.745\sin^2\varphi+42.244\sin^4\varphi-0.810\,5\sin^6\varphi \tag{19}$$

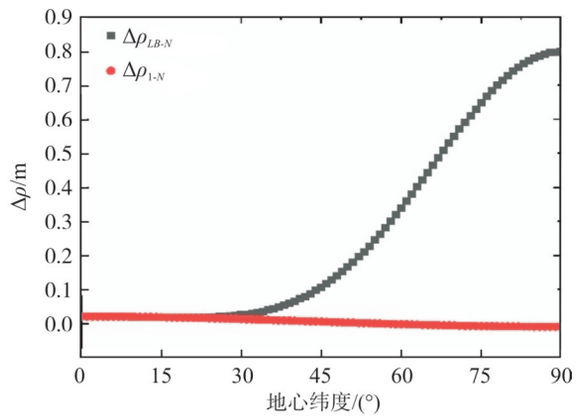
式(8)和式(10)为幂级数展开至t^3项的Helmert扁球水准面方程表达式为:

$$\rho_2=6\,378\,136.988-21\,492.461\sin^2\varphi+107.868\,57\sin^4\varphi+0.000\,115\sin^6\varphi \tag{20}$$

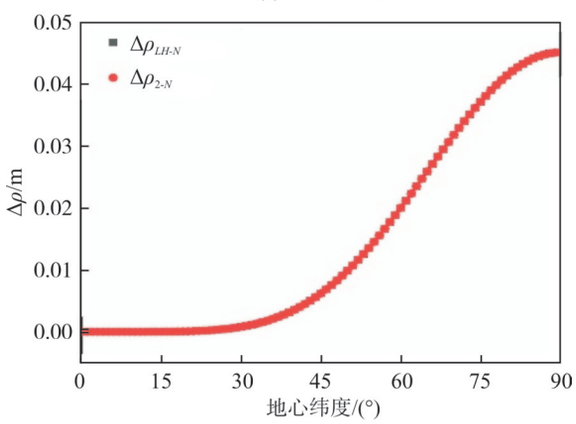
实际计算中,牛顿迭代法为数值计算方法,幂级数展开法仅取有限项数来计算,因此考虑以数值计算方法对幂级数展开法进行精度检验。对式(17)~式(20)和牛顿迭代法计算公式分别在地心纬度区间[0°~90°]内取间隔15°为一次计算点。幂级数展开至t^2项和t^3项的Bruns扁球水准面与牛顿迭代法计算结果差异如表1和图1(a)所示;幂级数展开至t^2和t^3项的Helmert扁球水准面与牛顿迭代法计算结果差异如表1和图1(b)所示。

图1(a)看出,幂级数展开至t^3项的Bruns扁球水准面与牛顿迭代法计算结果差异趋于稳定,且差异很小;幂级数展开至t^2项的Bruns扁球水准面与牛顿迭代法计算结果差异随纬度的升高而增大,最大约为0.8 m。图1(b)看出,幂级数展开至t^2项和t^3项的计算结果与牛顿迭代法计算结果近乎一致。

表1中$\Delta\rho_{LB}$为幂级数展开至t^2项的Bruns扁球水准面与牛顿迭代法计算结果差异,$\Delta\rho_1$为幂级数展开至t^3项的Bruns扁球水准面与牛顿迭代法计算结果差异。可以看出,赤道附近$\Delta\rho_{LB}$和$\Delta\rho_1$差异为0,幂级数展开至t^2项时,截断误差随纬度升高而逐渐增大,极区附近可达0.8 m左右;而展开至t^3项后,与牛顿迭代结果的差异明显减小并稳定在厘米量级,其中幂级数展至t^2项的精度稍低于展开至t^3



(a) Bruns扁球



(b) Helmert扁球

图 1　Bruns 和 Helmert 扁球水准面方程幂级数展开 t^2,t^3 项与牛顿迭代法对比

Fig. 1　Comparison of the Level Equation Series Expansion with the Newtonian Iterative Method

表 1　Bruns 扁球水准面方程 t^2,t^3 级数展开精度检验

Tab. 1　Bruns Ellipsoidal Level Equation Level Expansion Accuracy Check

φ/°	$\Delta\rho_{LB}$/m	$\Delta\rho_1$/m	$\Delta\rho_{1-LB}$/m
0	0.020 361	0.020 361	0
15	0.018 565	0.018 322	0.000 244
30	0.025 424	0.012 761	0.012 651
45	0.010 635	0.005 042	0.101 101
60	0.338 661	0.003 257	0.340 865
75	0.648 141	0.010 123	0.655 743
90	0.797 582	0.0128 89	0.807 145

项的精度,$\Delta\rho_1$ 的计算精度更加稳定,与数值计算方法相比差异仅在厘米量级,显著提高了计算精度。

表 2 中 $\Delta\rho_{LH}$ 为幂级数展开至 t^2 项的 Helmert 扁球水准面与牛顿迭代法计算结果差异,$\Delta\rho_2$ 为幂级数展开至 t^3 项的 Helmert 扁球水准面与牛顿迭代法计算结果差异。可以看出,Helmert 扁球展开至 t^2 项和 t^3 项时均与牛顿迭代法结果高度一致,其差异最小可达 10^{-8} m 量级,最大亦为 10^{-5} m 量级,说明 Helmert 扁球水准面方程对高阶截断不敏感,数值稳定性优于 Bruns 扁球。综上所述,幂级数展开最少至 t^3 的 Bruns 扁球水准面方程和幂级数展开最少至 t^2 的 Helmert 扁球水准面方程的计算精度可达到厘米级。

表 2　Helmert 扁球水准面方程 t^2,t^3 级数展开精度检验

Tab. 2　Helmert Ellipsoidal Level Equation Level Expansion Accuracy Check

φ/°	$\Delta\rho_{LH}$/m	$\Delta\rho_2$/m	$\Delta\rho_{2-LH}$/m
0	4.987×10^{-5}	4.987×10^{-5}	0
15	6.169×10^{-5}	6.169×10^{-5}	1.024×10^{-8}
30	8.471×10^{-4}	8.471×10^{-4}	1.797×10^{-7}
45	6.234×10^{-3}	6.236×10^{-3}	1.441×10^{-6}
60	0.020 005	0.020 010	4.870×10^{-6}
75	0.037 124	0.037 134	9.370×10^{-6}
90	0.045 088	0.045 099	1.154×10^{-5}

2.2　扁球体水准面与水准椭球面形状差异

为进一步分析不同正常重力等位面的几何一致性,将 Bruns 扁球、Helmert 扁球水准面向径与水准椭球面向径进行比较,定义差异量为:

$$\Delta\rho_M(\varphi)=\rho_M(\varphi)-\rho_E(\varphi),M\in\{B,H\} \quad (21)$$

同样在地心纬度区间[0°~90°]内取间隔 15° 为一次计算点,分析比较扁球水准面与水准椭球面间的差异。其中 Bruns 扁球水准面方程与水准椭球面间的差异对比结果如表 3、图 2(a)和图 3(a)所示;Helmert 扁球水准面方程与水准椭球面间的差异对比结果如表 4、图 2(b)和图 3(b)所示。而图 3(a)和图 3(b)均为将差异结果放大 20 000 倍后的示意图。

表 2、图 2(a)和图 3(a)看出,文献[12]给出的 Bruns 扁球水准面在地心纬度[−90°~90°]中大于水准椭球面,且在 $\varphi=\pm45°$ 处与水准椭球面差异最大为 26.932 2 m,在赤道($\varphi=0°$)和两极处($\varphi=\pm90°$)与水准椭球面重合。文献[13]和本节推导结果与水准椭球面相比有高低起伏变化,在 $\varphi=\pm41°$ 处与水准椭球面差异正值最大,其中 $\Delta\rho_{LB}$、$\Delta\rho_1$ 和 $\Delta\rho_{NB}$ 分别为 6.600 2 m、6.535 7 m 和 6.528 3 m;在 $\varphi=\pm90°$ 处与水准椭球面差异负值最大,其中 $\Delta\rho_{LB}$、$\Delta\rho_1$ 和 $\Delta\rho_{NB}$ 分别为 −14.485 2 m、−15.295 6 m 和 −15.282 7 m。综上,Bruns 扁球水准面与水准椭球面差异在十米量级误差,该差异虽小于全球大地水准面起伏的百米量级,但对于 mGal 级海洋重力测量和重力匹配导航而言已不可忽略。

表 4、图中 2(b)和图 3(b)看出,文献[13-14]和本文推导结果与水准椭球面相比有高低起伏变化,但变化较小。文献[13]结果与水准椭球面差异范围为 −0.005 4~0.063 3 m;文献[14]结果与水准椭球面差异范围为 −0.003 0~0.084 6 m;本文推导 t^3 项的 Helmert 扁球水准方程与水准椭球面差异范围为

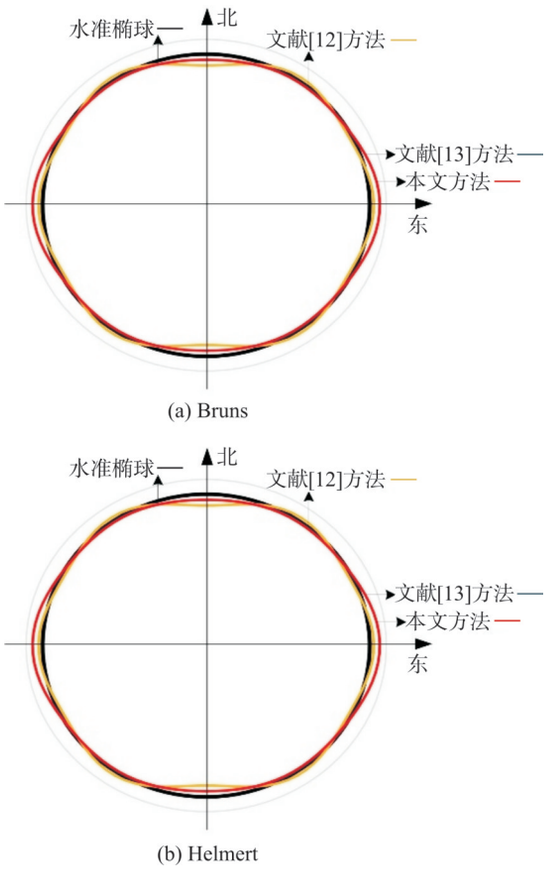


图 2　Bruns 和 Helmert 扁球水准面示意图

Fig. 2　Diagram of Bruns and Helmert Ellipsoidal Level

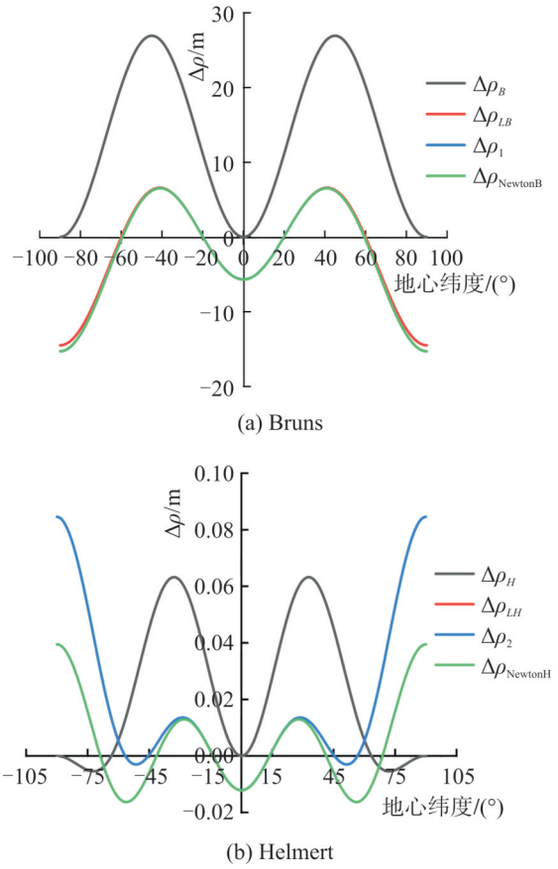


图 3　Bruns 和 Helmert 扁球水准面方程计算结果对比

Fig. 3　Comparison of Bruns and Helmert Ellipsoid Equation at Different Geocentric Latitudes

−0.003 0～0.084 6 m；牛顿迭代法计算结果与水准椭球面差异范围为−0.016 2～0.039 5 m。综上，Helmert 扁球水准面与水准椭球面差异在厘米量级，相比较于大地水准面起伏变化在百米量级，显然 Helmert 扁球在实际应用上是与大地水准面近似的。

表 3　Bruns 扁球水准面方程不同地心纬度处 $\Delta\rho$ 的对比

Tab. 3　Comparison of Bruns Ellipsoid Equation at Different Geocentric Latitudes

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\Delta\rho_B$/m	0.000	6.749 4	20.227 4	26.932 2	20.170 9	6.716 7	0.000
$\Delta\rho_{LB}$/m	−5.670	−2.151 4	4.432 9	6.293 6	−0.031 2	−9.818 1	−14.485 2
$\Delta\rho_1$/m	−5.670	−2.151 6	4.420 2	6.192 3	−0.373 1	−10.466 3	−15.295 6
$\Delta\rho_{NB}$/m	−5.670	−2.169 9	4.407 5	6.187 2	−0.372 1	−10.466 3	−15.282 7

表 4　Helmert 扁球水准面方程不同地心纬度处 $\Delta\rho$ 的对比

Tab. 4　Comparison of Helmert Ellipsoid Equation at Different Geocentric Latitudes

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\Delta\rho_H$/m	0.000 0	0.027 6	0.062 1	0.045 1	0.005 6	−0.005	0.000
$\Delta\rho_{LH}$/m	−0.012 1	0.001 8	0.013 5	0.000 4	0.005 3	0.052 9	0.084 6
$\Delta\rho_2$/m	−0.012 1	0.001 8	0.013 5	0.000 4	0.005 3	0.052 9	0.084 6
$\Delta\rho_{NH}$/m	−0.012 2	0.001 7	0.012 6	−0.005 9	−0.014 7	0.015 7	0.039 5

2.3　等位面偏差对重力匹配导航的物理误差传播

重力等位面的几何形变不仅仅是数学问题，更会通过正常重力垂直梯度[16]直接耦合到物理重力异常的计算中，主要从以下两个方面做出分析：

1)重力异常的系统偏差估算。设某一扁球水准面相对于水准椭球面的径向偏差为 $\Delta\rho_M$。严格地，重力归算采用沿椭球法线方向的偏差 Δh_M，二者可近似满足：

$$\Delta h_M(B)\approx\Delta\rho_M(\varphi)\cos(B-\varphi),$$
$$\tan\varphi=(1-e^2)\tan B \tag{22}$$

对于十米量级以内的数量级分析,可近似取 $\Delta h_M \approx \Delta \rho_M$。

正常重力沿法线方向的一阶变化为:

$$\gamma(B,h)=\gamma(B,0)+\frac{\partial \gamma}{\partial h}\Delta h+O(\Delta h^2) \quad (23)$$

由此,等位面偏差引起的重力异常系统误差可表示为:

$$\delta\Delta g_M(B)\approx \Gamma(B)\Delta h_M(B) \quad (24)$$

其中,$\Gamma(B)$为正常重力垂直梯度的绝对值,可按一阶近似写为:

$$\Gamma(B)=\frac{2\gamma(B)}{a}(1+f+m-2f\sin^2 B) \quad (25)$$

在实际工程和大地测量中,通常会计入正常重力垂直梯度完整项、纬度改正和离心力修正[17],完整一阶近似公式为:

$$\Gamma(B)\approx 2\frac{\bar{\gamma}}{R}\Delta N \quad (26)$$

其中,$\bar{\gamma}$是正常重力平均值;R为地球平均半径;ΔN为不同模型下的水准面高差,当高程单位取 m 时,Γ的单位为 mGal/m。据此,等位面偏差与重力异常误差之间近似具有线性关系:

$$\left|\delta\Delta g_M\right|\approx 0.308\,6\left|\Delta h_M\right| \quad (27)$$

计算出不同模型下几何偏差将产生线性放大的重力场偏差见表 5,需要强调的是,式(27)所描述的是由参考等位面不一致导致的系统偏差,而非随机测量噪声。该偏差若进入重力基准图,将在匹配导航中表现为具有空间相关性的背景误差。

表 5　等位面几何偏差引起的重力异常误差估算

Tab. 5　Estimating Gravity Anomaly Errors Caused by Interfacial Geometric Deviations

模型或情形	最大几何偏差/m	采用梯度/(mGal·m^{-1})	重力异常误差/mGal
Bruns	26.932 2	0.308 6	8.31
Bruns牛顿迭代法	15.282 7	0.308 6	4.72
Helmert	0.084 6	0.308 6	0.026

根据表 3、表 5 和图 3(a)看出,Bruns 扁球模型在 45° 纬度附近存在约 26.93 m 的径向偏差,这将在重力场模型中引入约 8.31 mGal 的系统误差。这一量级远超现代海洋重力仪的测量噪声阈值。根据表 4、表 5 和图 3(b)看出,Helmert 扁球模型的最大几何偏差仅为 0.08 m,引入的重力计算误差仅为约 0.02 mGal,可满足构建高精度海洋重力场的需求。

2)匹配导航定位的漂移估算。在重力匹配导航(如 TERCOM 算法)中,匹配定位精度的核心在于重力基准图的精度[18-20],基准重力图的系统误差会直接影响匹配定位结果[21,22]。设实测归算重力观测值为 z_i,基准图在位置 $\boldsymbol{x}_i$ 处的重力异常为 $g_r(\boldsymbol{x}_i)$,由等位面偏差产生的系统误差为 $\delta\Delta g_M(\boldsymbol{x}_i)$,观测噪声为 $\boldsymbol{v}_i$,则可写为:

$$z_i=g_r(\boldsymbol{x}_i)+\delta\Delta g_M(\boldsymbol{x}_i)+\boldsymbol{v}_i \quad (28)$$

在匹配点附近线性化,有:

$$\delta z_i\approx\nabla_h g_r(\boldsymbol{x}_i)^{\mathrm{T}}\delta x+\delta\Delta g_M(\boldsymbol{x}_i)+\boldsymbol{v}_i \quad (29)$$

若采用加权最小二乘形式,则由等位面系统误差导致的位置偏差可表示为:

$$\begin{aligned}&\delta\hat{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b},\\&\boldsymbol{H}_i=\nabla_h g_r(\boldsymbol{x}_i)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{b}_i=\delta\Delta g_M(\boldsymbol{x}_i)\end{aligned} \quad (30)$$

在缺乏完整轨迹和协方差矩阵的条件下,可采用标量数量级估算:

$$\left|\delta x\right|\approx\frac{\left|\delta\Delta g_M\right|}{G_{\mathrm{eff}}} \quad (31)$$

其中,G_{eff}为局部有效水平重力异常梯度,单位为 mGal/km。考虑浅海内陆架平缓地区和平缓深海盆地为典型可匹配海域,G_{eff}取 2 mGal/km,在基准图构建与实时重力测量归算中混用了具有十米级误差的 Bruns 扁球模型,则 Bruns 近似公式对应的 8.31 mGal 系统误差可导致约 4.15 km 的伪定位漂移;即使采用 Bruns 高阶展开或牛顿迭代结果对应的 4.72 mGal 误差,也可能导致约 2.36 km 的定位偏差,这将造成高达数公里的定位漂移。相反,若应用本文推导出的至 t^3 项的 Helmert 模型,其对应的 0.026 mGal 误差在相同梯度条件下仅产生约 0.013 km,即约 13 m 的定位影响,可以将引入的定位漂移贡献被压缩至百米甚至是十米级以内。

因此,若在重力基准图构建与实时重力测量归算中混用不一致的参考等位面,Bruns 扁球可能引入不可忽略的系统定位误差;Helmert 扁球由于与水准椭球面的几何一致性较好,其误差传播对重力匹配导航的影响显著较小。在低梯度海域,G_{eff}可能低于 2 mGal/km,此时同等重力异常偏差会被进一步放大为更大的定位误差,因而参考等位面一致性仍需作为重力匹配导航基准图构建中的关键约束。

3　结束语

本文围绕正常重力场中不同等位面模型的几何差异及其对重力匹配导航的物理误差传播问题开展研究。针对 Laplace 方法下定义的 Bruns 扁球、Helmert 扁球以及 Stokes 理论下定义的水准椭球,本文从正常重力位函数出发,系统推导了扁球体水准面方程,并采用幂级数展开法与牛顿迭代法对其几何形态和计算精度进行了数值验证。在此基础上,进一步建立了等位面几何偏差经正常重力垂直梯度向

重力异常误差传播、并进一步影响重力匹配导航定位精度的评估框架。主要结论如下。

(1)Bruns 扁球水准面方程在展开至 t^3 项后相对于牛顿迭代结果的误差可控制在厘米量级;Helmert 扁球水准面方程的幂级数展开结果与牛顿迭代结果具有更高一致性,整体误差亦处于厘米量级或更小量级。Bruns 扁球水准面与标准水准椭球面之间存在显著系统性几何差异。Helmert 扁球水准面与水准椭球面之间具有更高的几何一致性。

(2)等位面几何偏差会通过正常重力垂直梯度传播至重力异常归算结果。Bruns 扁球几何偏差可引入约 8.3 mGal 的重力异常系统误差。相比之下,Helmert 扁球约 0.08 m 的最大几何偏差仅对应约 0.02～0.03 mGal 的重力异常误差。

在高精度海洋重力基准图构建、重力异常归算和重力匹配导航应用中,应优先采用 Helmert 扁球或与水准椭球保持严格一致的正常重力场模型,以保证几何基准、物理基准和导航基准之间的一致性。

参 考 文 献

[1] 党亚民,蒋涛,杨元喜,等. 中国大地测量研究进展(2019—2023)[J]. 测绘学报,2023,52(9):1 419-1 436

[2] 冉将军,闫政文,吴云龙,等. 下一代重力卫星任务研究概述与未来展望[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2023,48(6):841-857

[3] 马健,吴富梅,黄河,等. 两种模型大地水准面高计算方法的比较分析[J]. 航天技术与工程学报,2026,3(2):102-109

[4] 马健,魏子卿,任红飞. 确定似大地水准面的Hotine-Helmert边值解算模型[J]. 测绘学报,2019,48(2):153-160

[5] Ma Jian, Wei Ziqing, Zhai Zhenhe, et al. Modification Methods of the Stokes' Kernel for Determining the (Quasi-) Geoid with the Remove-Compute-Restore Technique[J]. Journal of Geodesy, 2024, 98(11): 99

[6] 黄谟涛,邓凯亮,吴太旗,等. 重力异常垂向梯度严密改化模型及应用[J]. 地球物理学报,2022,65(12):4 616-4 627

[7] Zou Jiasheng, Cai Tijing, Zhao Shiliang. Gravity-Aided Navigation Underwater Positioning Confidence Study Based on Bayesian Estimation of the Interquartile Range Method[J]. Remote Sensing, 2025, 17(13): 2137

[8] Ma Jian, Wei Ziqing, Zhai Zhenhe, et al. Combined Algorithms of High-Frequency Topographical Effects for the Boundary-Value Problems Based on Helmert's Second Condensation Method[J]. Journal of Geodesy, 2024, 98(6): 55

[9] Zhao Shengwu, Xiao Xuan, Deng Zhihong, et al. Gravity Matching Algorithm Based on Correlation Filter[J]. IEEE Sensors Journal, 2023, 23(3): 2 618-2 629

[10] Li Wenchao, Gilliam C, Wang Xuezhi, et al. Gravity-Aided Navigation Using Viterbi Map Matching Algorithm [J]. Journal of Navigation, 2024, 77(3): 307-321

[11] Zhao Xin, Zheng Wei, Xu Keke, et al. Optimizing the Matching Area for Underwater Gravity Matching Navigation Based on a New Gravity Field Feature Parameters Selection Method [J]. Remote Sensing, 2024, 16(12): 2202

[12] Guo Junyi. Physical Geodesy: A Theoretical Introduction[M]. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023

[13] 丁行斌. 扁球重力场的水准面方程和重力公式[J]. 海洋测绘,1995(4):14-19

[14] 李厚朴,边少锋. 扁球体水准面与水准椭球面形状差异的研究[J]. 测绘学报,2009,38(2):95-100

[15] 魏子卿. 正常重力公式[J]. 测绘学报,2003,32(2):95-101

[16] 边少锋,李兆权,翟国君,等. 全张量重力梯度正演计算及其可视化系统构建[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2024,49(11):1 992-2 002

[17] 刘金钊,柳林涛,梁星辉,等. 基于实测重力异常和地形数据确定重力梯度的研究[J]. 地球物理学报,2013,56(7):2 245-2 256

[18] Zong Jingwen, Bian Shaofeng, Tong Yude, et al. Classification of Gravity Matching Areas Using PSO-BP Neural Networks Based on PCA and Satellite Altimetry Data over the Western Pacific [J]. Sensors, 2022, 22(24): 9892

[19] 边少锋,李兆权,张涛,等. 地球重力场研究进展及其在惯性导航系统中的作用[J]. 导航定位与授时,2025,12(6):1-15

[20] 黄谟涛,欧阳永忠,边少锋,等. 美俄水下重力辅助惯性导航技术发展分析与思考[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2024,49(11):1 977-1 991

[21] 肖云,张锦柏,陈垲宁,等. 基于重力灯塔导航的水下重力匹配导航算法[J]. 中国惯性技术学报,2025,33(7):663-671

[22] 毛国丞,武凛,席梦寒,等. 基于重力场深层感知模型的重力匹配导航适配区选取算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2024,49(11):2 122-2 135

修回日期:2026-08-28

第一作者:宗敬文,讲师,主要从事物理大地测量和水下导航相关理论与方法研究。 E-mail:zjw19950613@163.com

通信作者:郭正东,博士,教授,现主要从事水下导航相关理论与方法研究。 E-mail:944636507@qq.com